



# Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

POWSZECHNY INTERNETOWY KONKURS dla uczniów szkół średnich – Matematyka

Finał XXV edycji – 13 kwietnia 2024 r.

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  zachodzi nierówność

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1).$$

2. Punkt  $P$  leży wewnątrz kwadratu. Jego odległości od trzech kolejnych wierzchołków kwadratu są odpowiednio równe  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ , 5 oraz  $2\sqrt{5}$ . Oblicz pole tego kwadratu.
3. Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Ile różnych rozwiązań ma to równanie w przedziale  $[0, 5\pi]$ ? Znajdź sumę wszystkich różnych rozwiązań w tym przedziale.

4. Niech  $n \geq 1$  będzie liczbą całkowitą, a  $A$  zbiorem  $n$ -elementowym. Mamy  $2^n - 1$  żetonów i na każdym z nich zapisano inny niepusty podzbiór zbioru  $A$ . Basia i Kasia na przemian wybierają losowo żeton. Jeśli Basia wybierze żeton z zapisanym zbiorem  $X$ , to kolorem czerwonym oznacza wybrany przez siebie żeton i wszystkie inne żetony z zapisanymi podzbiórami  $X$ . Po niej Kasia robi to samo, tylko oznacza odpowiednie żetony kolorem zielonym. Żetony mogą być oznaczone dwoma kolorami. Wybór każdego żetonu jest jednakowo prawdopodobny.
- (a) Jaka jest średnia liczba pokolorowanych żetonów przez Basię po pierwszym jej ruchu?
- (b) Załóżmy, że na początku usunęliśmy żeton z zapisanym zbiorem  $n$ -elementowym. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że po pierwszym ruchu Basi i Kasi nie będzie żetonów niepokolorowanych co najmniej jednym kolorem.

Uzasadnij ponadto, że zachodzi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n b_n} = 1$ , gdzie  $a_n$  oznacza odpowiedź na podpunkt (a), a  $b_n$  oznacza odpowiedź na podpunkt (b).

**Komentarz od organizatorów:** Zaznaczona żółtym kolorem część zadania 4 została źle sformułowana. Przy ocenie zaznaczona część zadania nie była brana pod uwagę. Za punkt (a) można było otrzymać maksymalnie 15 punktów, a za punkt (b) maksymalnie 5 punktów.

5. Zbadaj czy istnieje przekrój sześcianu płaszczyzną, który jest pięciokątem foremnym.

**Za rozwiązanie każdego zadania można uzyskać maksymalnie 20 punktów**